CONCOURS COMMUN E.N.S.A.M.

SESSION 1984

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

Épreuve n° 1 (exercices)

Les cinq exercices sont indépendants

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à écrire lisiblement, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, à donner de leurs affirmations des démonstrations complètes mais brèves.

EXERCICE I

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E, par id_E l'application identique de E et par ρ l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui a pour matrice dans B:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°) Montrer que ρ est une isométrie.
Préciser ses caractéristiques géométriques.

2°) Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par les trois applications: id_E , ρ et ρ^2. Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?
$\mathcal{F}$ est-il stable pour la composition des applications ?

3°) Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ contient toutes les rotations d'axe D. (Il pourra être utile de choisir une nouvelle base de E).

EXERCICE II

1°) On considère l'application F: $[\ -\pi,\ \pi\ ] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \cos\ (x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{pour} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$$

$$f(x) = \sin\ (x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

Montrer que F est paire.
F est-elle dérivable sur $[\ -\pi,\ \pi\ ]$?
Tracer la courbe représentative de F .

2°) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, dont F est la restriction à $[\ -\pi,\ \pi\ ]$.

On désigne par $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ le terme général de la série de Fourier de f.
Calculer les coefficients a_n et b_n (on distinguera soigneusement les différents cas).

3°) Quelle est la somme de la série de Fourier de f ?
En déduire la valeur de S :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 - 16\ k^2}.$$

EXERCICE III

Dans un espace affine euclidien réel de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit le point A de coordonnées (0, 0, a) et la courbe C d'équations:

$$y^2 - 2ax = 0, \quad z = 0$$

a étant une constante réelle > 0 donnée.

1°) Déterminer une équation de la surface conique T de sommet A et de directrice C.

2°) Calculer l'aire de la portion de T définie par les conditions:

$$\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a \quad \text{et } z \geqslant 0.$$

3°) Montrer que T est une surface de révolution.

EXERCICE IV

1°) Soit f l'application de $[\ 0,\ 1\ ]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arc sin } \sqrt{x}$.
Pour quelles valeurs de x, f est-elle dérivable ?

2°) Soit l'équation différentielle:

$$(1) \qquad 2x\ (1 - x)\ y' + (1 - 2x)\ y = 1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x.

Déterminer les solutions de (1) sur $]\ 0,1\ [$. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) sur $]\ 0,1\ [$ ayant en 0 une limite finie. Préciser cette solution.

3°) On cherche une solution de (1) sous la forme:

$$y\ (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n\ .$$

Ecrire la relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n.

Calculer a_n pour tout n. Préciser le rayon de convergence des séries obtenues.

4°) Quelles relations existe-t-il entre les solutions de (1) décrites au 3°) et celles qui ont été déterminées au 2°) ?

EXERCICE V

<u>Les candidats ne chercheront pas à calculer les intégrales dont la valeur n'est pas demandée dans l'énoncé.</u>

On considère la fonction u, des variables réelles t et x, définie par:

$$u(t,x) = e^{-t}\ t^x$$

et la fonction f définie par:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} u(t,x)\ dt\ .$$

1°) Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.
Etablir la relation: $f(x + 1) = (x + 1)\, f(x)$

Calculer $f(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

2°) On admet que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Montrer que la dérivée f' s'annule dans l'intervalle $]0, 1[$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que:

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\, dt \ .$$

Montrer que f' est croissante et s'annule une seule fois sur $]0, 1[$.
(On ne cherchera pas à préciser en quel point).

3°) Etudier les variations de f .

Etudier les limites: $\lim_{x \to -1} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Tracer la courbe représentative de f.